4/4/16

Θεώρημα συμπληρωματικής χαλαρότητας

Αν $\hat{\underline{x}}$ και $\hat{\underline{w}}$ είναι άριστες λύσεις των (Π) και (Δ) αντίστοιχ

τότε $\hat{x}_i(a_{1j}\hat{w}_1 + \dots + a_{ij}\hat{w}_i - c_j) = 0 \quad j=1,\dots,m, \ i=1,\dots,n$

$\hat{w}_i(a_{1j}\hat{x}_1 + \dots + a_{ij}\hat{x}_i - b_i) = 0 \quad j=1,\dots,n, \ i=1,\dots,m$

Λύση του (Δ) είναι $\hat{\underline{w}}' = c_B' B^{-1}$

$\underline{w}'\underline{b} = c_B'$

P_i είναι μια βασική εφικτή συνάρτηση λύση του (Π)

$\underline{w}' P_i = c_i$

- $\max 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

(Π)

$$
\begin{aligned}
8x_1 + 6x_2 + x_3 &\le 48 \\
2x_1 + 15x_2 + 0{,}5x_3 &\le 8 \\
4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 &\le 20 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

$(x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 8,\ z = 280)$

$$\max\ 48w_1 + 8w_2 + 20w_3$$

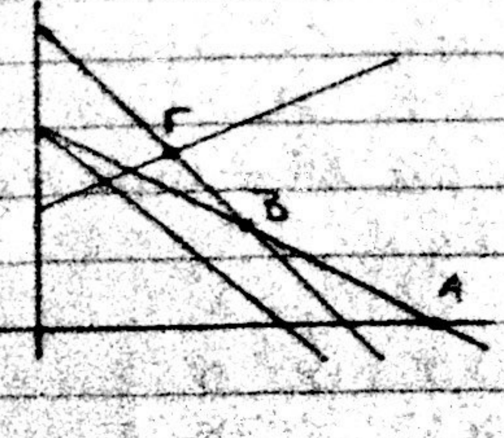
(Δ)
$$8w_1 + 2w_2 + 4w_3 \geq 60 \qquad w_1 = 0$$
$$6w_1 + 1.5w_2 + 2w_3 \geq 30$$
$$w_1 + 0.5w_2 + 1.5w_3 \geq 20$$
$$w_i \geq 0$$

$$\left.\begin{aligned} 8\cancel{w_1} + 2w_2 + 4w_3 &= 60 \\ \cancel{w_1} + 0.5w_2 + 1.5w_3 &= 20 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} w_2 &= 10 \\ w_3 &= 10 \end{aligned}$$

• $$\max\ 10x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 + 12x_5$$

(Π)
$$2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_5 \leq 18 \quad \Big| \quad 2x_1 + x_3 = 18 \qquad x_1 = 8$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 6 \quad \Big| \quad x_1 - x_3 = 6 \qquad x_3 = 2$$
$$x_i \geq 0 \qquad x_2 = 0$$
$$x_4 = 0$$
$$x_5 = 0$$

(Δ) $$\min\ 18w_1 + 6w_2$$
$$2w_1 + w_2 \geq 10$$
$$w_1 + w_2 \geq 6$$
$$w_1 - w_2 \geq -4$$
$$w_2 \geq 1$$
$$3w_1 + 2w_2 \geq 12$$
$$w_1, w_2 \geq 0$$



$w_1 = 2, w_2 = 6, u = 72$

• $\max 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 6$$
$$2x_3 - 3x_4 = 3$$
$$x_i \geq 0$$

$x' = (3/5, 0, 21/5, 9/5)$ Η λύση

Χρησιμοποιώντας τα πάνω να δώ τη λύση του δυικού.

$\min 8w_1 + 6w_2 + 3w_3$

$w_1 \geq 2$	$w_1 = 2$
$2w_1 + w_2 \geq -3$	$w_1 + w_2 + 2w_3 = 1$
$w_1 + w_2 + 2w_3 \geq 1$	$2w_1 + w_2 - w_3 = 2$
$2w_1 + w_2 - 3w_3 \geq 2$	(από όπου βρίσκω την λύση)
$w_i \in \mathbb{R}$	

• $\max 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$ (Σωστό).

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 10$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$
$$x_i \geq 0$$

$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 4$

• Παρακάτω δίνεται το αρχικό και τελικό μέρος π.γ.π μεγιστοποίησης με τη μέθοδο M.

			3	1	0	0	0	-M
B	c_B	B	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P	-M	1	1	1	-1	0	0	0
	0	1	1	-1	0	1	0	0
	0	1	-1	1	0	0	1	0
		-M	-1-M	-1-M	M	0	0	1

Scanned by CamScanner

P_1	1	1	1	-1	0	1	0	0
P_3	0	0	0	-2	1	1	0	-1
P_5	0	2	0	0	0	1	1	0
		1	0	-2	-	1	0	M

1) Να διατυπωθεί το πρόβλημα
2) Να συμπληρωθεί το τελικό ταμπλό
3) Με αναφορά στο τελικό ταμπλό να δοθεί η λύση του πρωτεύοντος
4) Του προβλήματος αυτού να κατασκευαστεί το δυϊκό. Έχει το δυϊκό πρόβλημα λύση;

$\max x_1+x_2$

$w_1 \quad x_1+x_2 \geq 1$

$w_2 \quad x_1-x_2 \leq 1$

$w_3 \quad -x_1+x_2 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

$\min w_1+w_2+w_3$

(Δ) $w_1+w_2-w_3 \geq 0$

$w_1+w_2+w_3 \geq 0$

$w_1 \leq 0, \; w_2, w_3 \geq 0$

• Παρακάτω δίνονται το αρχικό και το τελικό tableau ενός π.γ.π

			6	3		
B	c_B	B	P_2	P_3	P_1	P_4
P_4	0	-3	3	-2	0	1
P_1	2	4	5	2	1	0
	2	8	4	1	0	0

Scanned by CamScanner

			6	0	2	3
B	c_B	β	P_2	P_4	P_1	P_3
P_3	3	3/2	3/2	-1/2	0	1
P_1	2	1	8	1	1	0
	2	13/2	11/2	1/2	0	0

1) Να διατυπωθεί το πρόβλημα
2) Να ορισθεί και να λυθεί το δυϊκό του.

$$\max\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

(Π)

w_1: $3x_2 - 2x_3 \leq -3$

w_2: $x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$$\min\ -3w_1 + 4w_2$$

(Δ)

$w_2 \geq 2$

$3w_1 + 5w_2 \geq 6$

$-2w_1 + 2w_2 \geq 3$

$w_1 \geq 0,\ w_2 \in \mathbb{R}$

$w_1 = 1/2,\ w_2 = 0$ η λύση για το δυϊκό μου.

$-\dfrac{c_1}{c_2}$ κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης

$-2 < -\dfrac{c_1}{c_2} < -0,5$

$$\max\ 3x_1 + 5x_2$$

$2x_1 + x_2 \leq 230$

$x_1 + 2x_2 \leq 250$

$x_1 \leq 110$

$x_1, x_2 \geq 0$

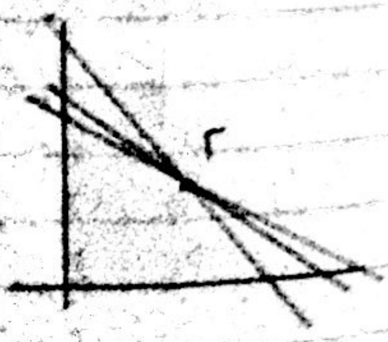
Γ(70, 90)

$c_2 = 5$

$-2 < -\dfrac{c_1}{c_2} < -0,5$

$(c_1 + \Delta c_1)\, 70 + 590$

([illegible]



Scanned by CamScanner

x_k μικρώ που δεν είναι στη βάση
$z_k - (c_k + \Delta c_k) \geq 0 \Rightarrow \Delta c_k \leq z_k - c_k$
Έστω τώρα x_k που είναι στη βάση
$\hat{c}_B = (c_{B_1}, c_{B_2}, \dots, c_{B_r} + \Delta c_{B_r}, \dots, c_{B_m})$

$$\hat{z}_j - c_j = \hat{c}_B B^{-1} P_j - c_j > 0 \quad \forall j$$
$$= c_B B^{-1} P_j + (0, \dots, \Delta c_{Br}, \dots, 0) \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{rj} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{pmatrix} - c_j \geq 0$$
$$= z_j - c_j + \Delta c_{B_r} y_{rj} \geq 0$$
$$\Delta c_{Br} y_{rj} \geq -(z_j - c_j)$$

Αν $y_{rj} \geq 0$ $\Delta c_{Br} \geq -\dfrac{(z_j - c_j)}{y_{rj}}$ $\forall j$

Αν $y_{rj} < 0$ $\Delta c_{Br} < -\dfrac{(z_j - c_j)}{y_{rj}}$

$$\max_j \left\{ -\frac{(z_j - c_j)}{y_{rj}}, y_{rj} > 0 \right\} \leq \Delta c_{Br} \leq \min_j \left\{ -\frac{(z_j - c_j)}{y_{rj}}, y_{rj} < 0 \right\}$$

διάστημα τιμής

- $\max z = (60x_1 + 30x_2 + 20x_3)$

$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$
$2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \leq 8$
$4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \leq 0$ (αν αλλάξω)

			60	30	20	0	0	0
B	c_B	B	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_4	0	24	0	-2	0	1	-8	2
P_1	60	2	1	1,25	0	0	1,5	-0,5
P_3	20	8	0	-2	1	0	-4	2
	2	280	0	-5	0	0	10	10

Scanned by CamScanner

Αλλαγή στο c_2, ας πάρουμε στο $c_2 \to c_2 + \Delta c_2$

$\Delta c_2 \leq z_2 - c_2 \leq 5$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 60+\Delta c_1 \\ \cdot 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}25 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (60+\Delta c_1)1{,}25 - 40 - 20 \geq 0 \quad \Delta c_1 \geq -4$$

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 1{,}5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (60+\Delta c_1)1{,}5 - 40 \geq 0 \quad \Delta c_1 \geq -\frac{20}{3}$$

$$(60+\Delta c_1)(-0{,}5) + 40 \cdot 0 \geq 0 \quad \Delta c_1 \leq 20$$

$$-4 \leq \Delta c_1 \leq 20$$

Αλλάζοντας τα b θα επηρεάσει η λύση με τέτοιο τρόπο ώστε να μείνει εφικτή.

$\hat{b}_k = b_k + \Delta b_k$

$\hat{b} = \underline{b} + \Delta b_k \underline{e}_k$

$\hat{x}_B = B^{-1}\hat{b} = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b_k \underline{e}_k \geq 0$

$x_{B_i} + \Delta b_k y_{ik} \geq 0 \quad \forall i$

Αν $y_{ik} < 0$ το $\Delta b_k \leq -\dfrac{x_{B_i}}{y_{ik}} \quad \forall y_{ik} < 0$

$y_{ik} > 0 \quad \Delta b_k \geq -\dfrac{x_{B_i}}{y_{ik}} \quad \forall y_{ik} > 0$

Συνεπώς: $\max_i \left\{ -\dfrac{x_{B_i}}{y_{ik}}, y_{ik} > 0 \right\} \leq \Delta b_k \leq \min_i \left\{ -\dfrac{x_{B_i}}{y_{ik}}, y_{ik} < 0 \right\}$

Εύρος μέσα στο οποίο η βάση μας παραμένει αμετάβλητη.

Scanned by CamScanner

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \Delta b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Delta b_1 \geq -24$$

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \Delta b_2 \begin{pmatrix} -8 \\ 1,5 \\ -4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{-2}{1,5} \leq \Delta b_2 \leq \min\left\{\frac{24}{8}, \frac{8}{4}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \Delta b_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -0,2 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \max\left\{\frac{-24}{2}, \frac{8}{2}\right\} \leq \Delta b_3 \leq \min\left\{-\frac{2}{-0,2}\right.$$

- $\max\ z = 20.000x_1 + 30.000x_2$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 180$$
$$3x_1 + 3x_2 \leq 135$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

			20000	30000	0	0
B	c_B	B	P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	30000	30	0	1	1/3	-2/9
P_1	20000	15	1	0	-1/3	5/9
	z	1200000	0	0	10000/3	40000/9

(Μετά τη λύση του προβλήματος έχω το τελικό tableau)

1) Να βρεθεί και να ερμηνευθεί το δυϊκό του. Ποιά είναι η άριστη λύση του.
2) Σε τι ποσό ανέρχεται η συμβολή του καθενός των πόρων στα συνολικά έσοδα της εταιρείας;
3) Αν η εταιρεία μπορούσε να εξασφαλίσει την ύπαρξη επιπλέον μονάδων ενός μόνο από τους πόρους να χρησιμοποιεί, ποιός θα έπρεπε να είναι αυτός;

Scanned by CamScanner

4) Σε ποιο ποσό θα έπρεπε να ανέρχονται τα κέρδη από τα στρογγυλά τραπέζια (x_2) ώστε να μην παράγονται καθόλου στρογγυλά (x_1); Στην περίπτωση αυτή ποιά είναι η άριστη λύση του προβλήματος

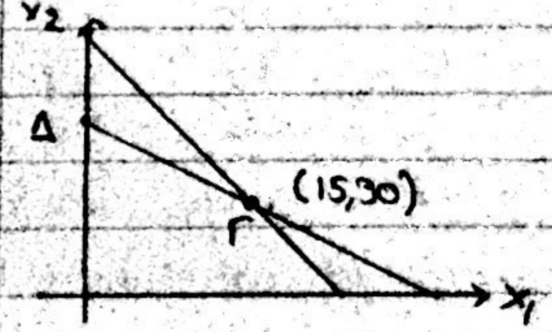
$$\min \ 180w_1 + 135w_2$$
$$8w_1 + 3w_2 \geq 20000$$
$$5w_1 + 3w_2 \geq 30000$$

$w_1 = \frac{10000}{3}$ και $w_2 = \frac{40000}{9}$

$180 \frac{10000}{3}$ (συμβολή χρόνου εργασίας)

$135 \frac{40000}{9}$ (συμβολή ξυλείας)

προφανώς ο πόρος που έχει μεγαλύτερη αξία, ο πόρος με μεγαλύτερη δυϊκή τιμή



$$-\frac{3}{3} \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -\frac{2}{3}$$

(θα έπρεπε να φέρω την αντικειμενική συνάρτηση στο Δ)

$$-\frac{c_1}{c_2} \geq -\frac{2}{3}$$

$-\frac{20000}{c_2} \geq -\frac{2}{3}$ βρίσκουμε το c_2

Scanned by CamScanner

· max $3x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad = 30 \quad (A)$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 15 \quad (B)$$
$$2x_2 \qquad + 3x_4 \leq 25 \quad (C)$$
$$x_i \geq 0$$

			3	1	5	3	0	0	-M	-M
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
P_5	0	$38\frac{1}{3}$	2,5	$1/6$	0	0	1	$1/3$	1,5	-1
P_3	5	15	1,5	0,5	1	0	0	0	0,5	0
P_4	3	$8\frac{1}{3}$	0	$2/3$	0	1	0	$1/3$	0	0
	2	100	4,5	3,5	0	0	0	1	2,5 +M	0 +M

η μεταβολή [illegible]

1) Ποιά η βελ λύση και ποιά η βελ τιμή του προβλήματος;

2) Πως θα επιδρούσε στη βελ λύση και βελ τιμή του μοντέλου μια αύξηση τριών μονάδων στον αντικειμενικό συντελεστή c_2 (αν ήταν δηλαδή $c_2 = 4$)

3) Πως θα επιδρούσε στη βελ λύση και βελ τιμή του μια μείωση 2 μονάδων στον αντικ συντελ. c_3;

4) Ποιά θα ήταν η βελ τιμή εάν το δεξιό μέλος του (C) μειωνόταν στις 5 μονάδες;

5) Ποιά θα ήταν η βελ τιμή εάν το δεξιό μέλος του (B) αυξανόταν 30;

2) Καμία μεταβολή δεν έχω και αφού c_2 δεν επηρεάζει τη βάση δεν επηρεάζει τίποτα.

3) Αλλάζω το 5 με 3 και αλλάζω τελευταία σειρά αλλιώς πάω και βρίσκω εύρος να δω τι γίνεται

Scanned by CamScanner